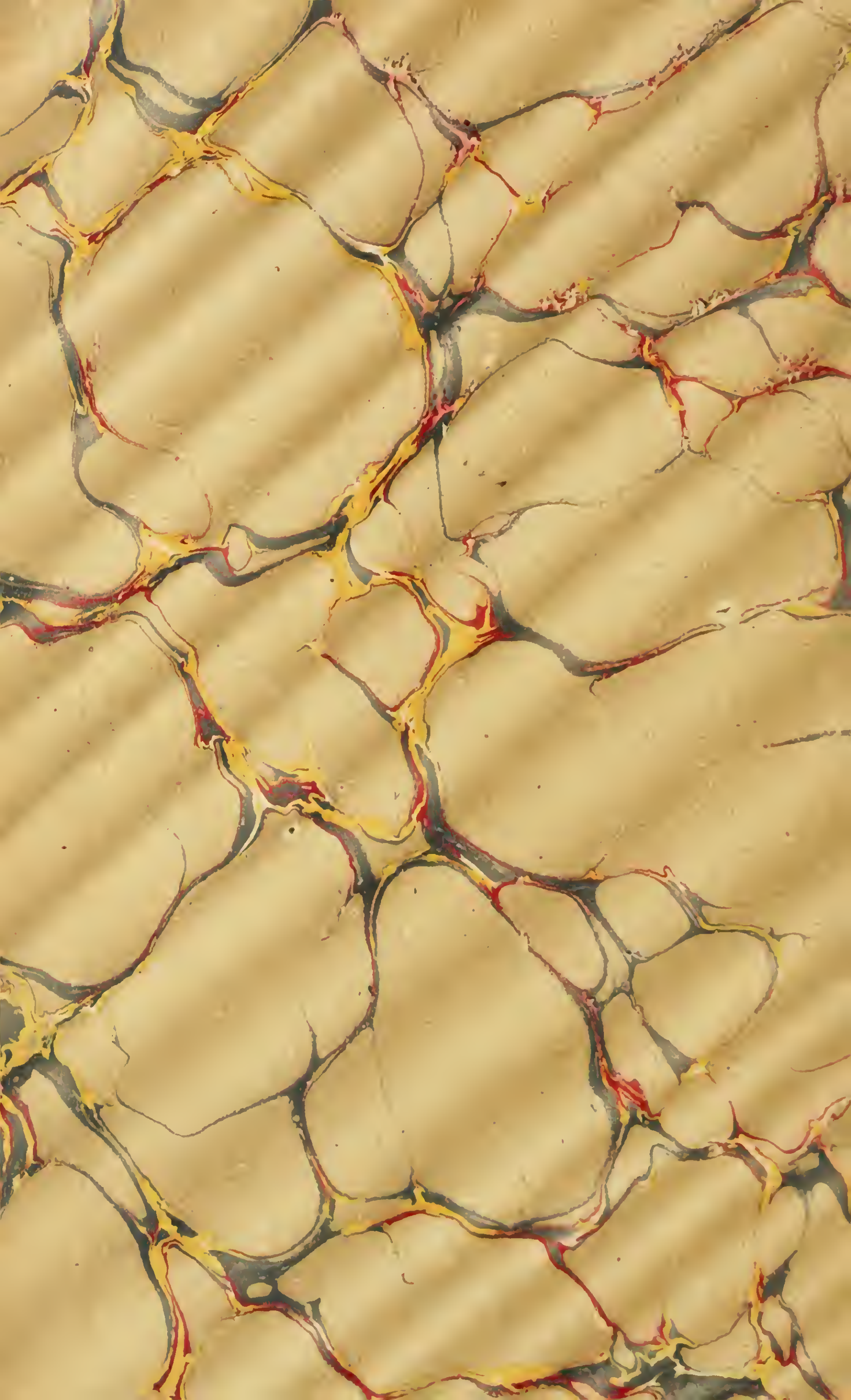
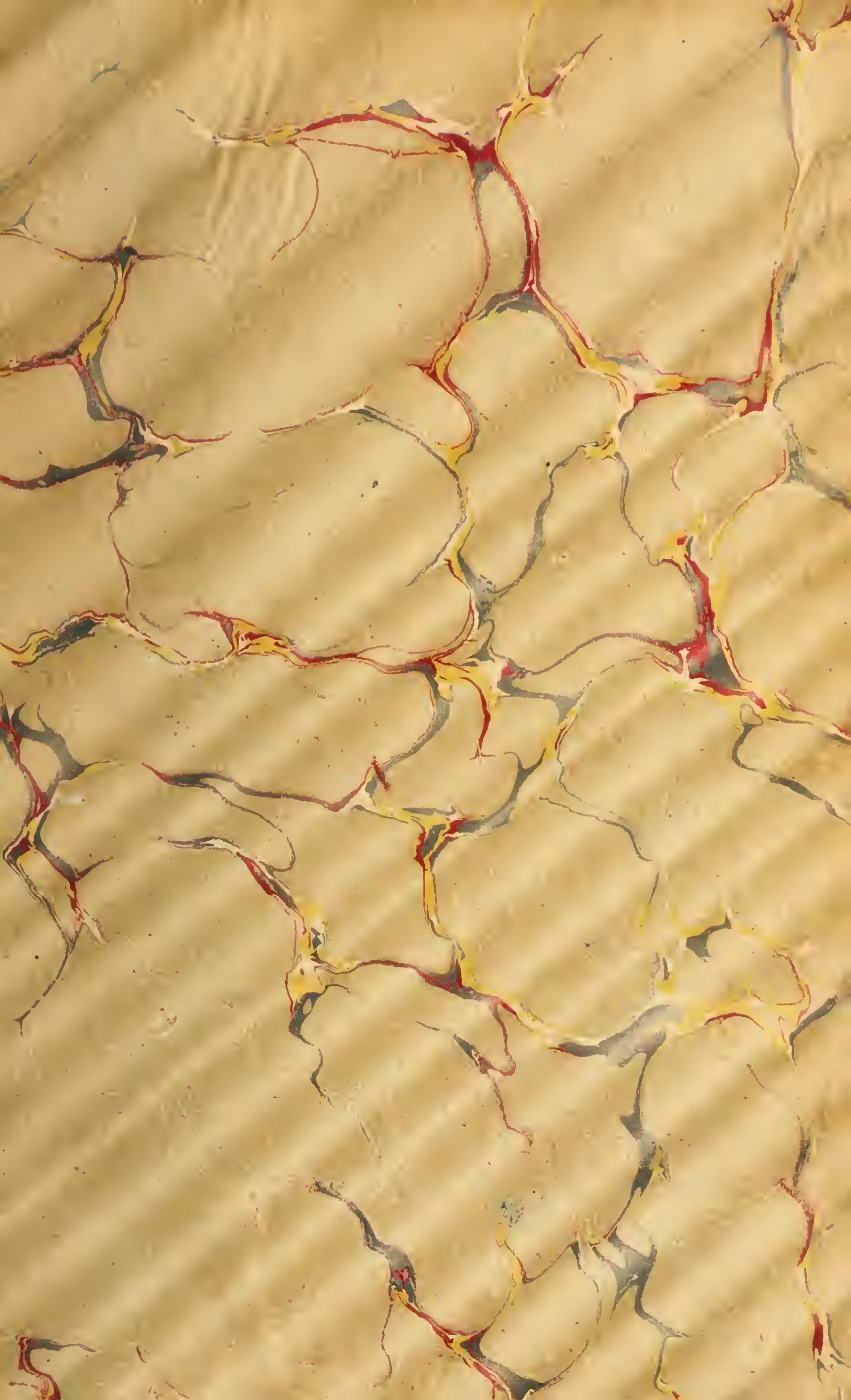

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01195488 0
QA
467
R4





SOLUTIONS APPROCHÉES

DE LA

TRISECTION DE L'ANGLE

ET DE LA

QUADRATURE DU CERCLE

IMPRIMERIE ALPH. RECORDON A VEVEY.

SOLUTIONS APPROCHÉES

DE LA

TRISECTION DE L'ANGLE

ET DE LA

QUADRATURE DU CERCLE

PAR

C. J. RECORDON

Gradué de l'Université de Cambridge.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

LAUSANNE
DELAFONTAINE ET ROUGE
PLACE DE LA PALUD.

1865

ERRATA

Page 2, ligne 6 en remontant, après « d'équations » ajoutez : « algébriques. »

Page 12, ligne 6 en remontant, au lieu de « les sinus de la formule (3) par les arcs correspondants », lisez : « le sinus de la formule (3) par l'arc correspondant. »

Page 28, ligne 8, après « membre » ajoutez : « lorsque $n = 1$. »

OUVRAGE DU MÊME AUTEUR :

Essai sur le Mouvement de la Lune, où l'on examine pourquoi ce satellite nous présente toujours la même face. Paris et Lausanne. 1855.

INTRODUCTION

Dans l'impossibilité où l'on est de donner des solutions exactes aux importants problèmes de la trisection de l'angle et de la quadrature du cercle, on est réduit à en chercher des *solutions approchées.*

Dans la pratique, quand il s'agit de ces problèmes, un dessinateur obtient facilement des approximations suffisantes.

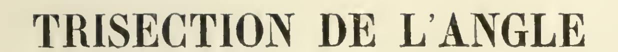
Les solutions que je présente ici conduisent rapidement, en théorie du moins, à un degré d'approximation non-seulement très-grand, mais, je puis presque dire, aussi grand que l'on voudra; et elles sont, je crois, assez simples pour devenir utiles dans la pratique.

Des méthodes géométriques de pareille force n'ont pas encore, que je sache, été appliquées aux dits problèmes : leur pouvoir et leur simplicité me font douter qu'il puisse en exister de meilleures de leur nature, et j'ose par conséquent presque me flatter qu'on pourra les considérer comme le dernier effort possible de la GÉOMÉTRIE proprement dite vers les solutions rigoureuses qu'on ne saurait obtenir.

On peut dire que l'impossibilité de ces solutions rigoureuses est une impossibilité morale. La preuve mathématique d'une proposition négative peut être difficile, et d'une longueur qui la rendrait impraticable, à cause du grand nombre de cas qu'on peut avoir à considérer.

Cependant, à l'égard du premier problème, on sait que des constructions qui n'emploient que des cercles et des lignes droites ne peuvent conduire, lorsqu'on les traduit pour ainsi dire en langage analytique, qu'à des équations des deux premiers degrés ou à des équations susceptibles d'être décomposées en facteurs de ces degrés-là ; et que, de plus, les coefficients de ces équations ou facteurs ne sauraient exiger, sur des quantités connues, des opérations impraticables à la Géométrie, quoique reconnues en Algèbre, telles que des extractions de racines cubiques ou l'introduction de fonctions du tiers d'un angle connu. On peut donc dire que s'il existait une solution géométrique de la trisection de l'angle, ce problème ne pourrait conduire analytiquement à une équation du troisième degré ; ce qu'il fait.

A l'égard du second problème, une longueur arbitraire étant choisie pour rayon d'un cercle, la longueur de sa circonférence est une qualité essentielle et inhérente à l'espace, et il n'y a pas de raison *a priori* pour que le rapport de ces deux longueurs soit exprimable, sous forme finie, au moyen de quantités d'*une autre nature*, telles que des nombres, des fractions, des racines de quantités ou d'équations : d'où il suit en particulier, d'après ce que nous venons de dire par rapport aux constructions géométriques, qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que le problème ait une solution géométrique. En d'autres termes, on pourrait dire que ce rapport est une *quantité transcendante*.



TRISECTION DE L'ANGLE

SOLUTION APPROCHÉE

DE LA

TRISECTION DE L'ANGLE*

THÉORÈME.

Si par un sommet d'un losange deux lignes sont tirées de manière qu'elles coupent la diagonale opposée et les prolongements des côtés opposés en des points équidistants du sommet opposé, ces lignes diviseront un angle du losange en trois parties égales.

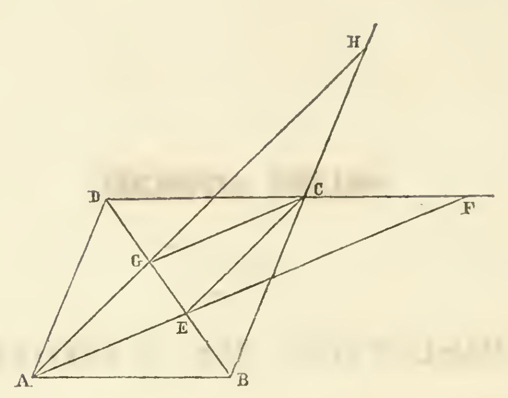
Soient $A\ B\ C\ D$ un losange et $A\ E\ F$, $A\ G\ H$ deux lignes qu'on suppose tirées de manière qu'on ait

$$C\ E = C\ F = C\ H = C\ G,$$

* J'ai déjà décrit brièvement cette solution, sous une forme un peu différente, dans le « Mechanics' Magazine » de Londres du 26 janvier 1856.

Dans le numéro du même journal du 6 mai 1854, j'ai aussi décrit un instrument « trisecteur d'angles ».

je dis que $A F$, $A H$ diviseront l'angle $B A D$ en trois parties égales.



En effet, il est apparent que les triangles $A B E$, $B E C$ sont égaux,

donc $A E = E C$;

de même $A G = G C$;

de plus $C E = C G$ par supposition;

donc la figure $A E C G$ a ses quatre côtés égaux et est un losange,

donc l'angle $G A E = C E F$;

mais puisque $C E = C F$ par supposition,

l'angle $C E F = C F E$;

donc l'angle $G A E = C F E$

$= F A B$.

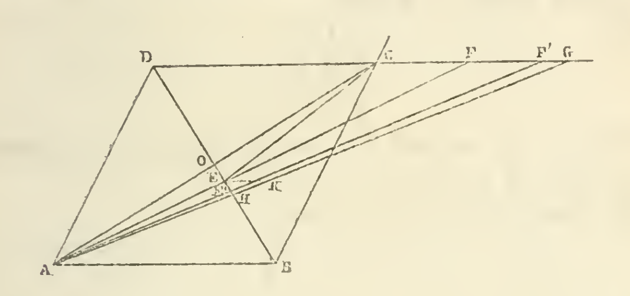
De la même manière on prouvera que

l'angle $G A E = H A D$;

donc les trois angles $F A B$, $F A H$, $H A D$ sont égaux, ou, les lignes $A F$, $A H$ divisent l'angle $B A D$ en trois parties égales, ce qu'il fallait démontrer.

C'est sur ce théorème que se fonde notre méthode d'approximation.

Soit $B\ A\ D$ un angle quelconque à diviser en trois parties égales. Ayant pris $A\ B$ à volonté, achevons le losange $A\ B\ C\ D$;



prolongeons $D\ C$, $B\ C$. Tirons $A\ E\ F$ *à vue* de manière que $C\ E$, $C\ F$ paraissent être égales. S'il se vérifie que $C\ E = C\ F$, le problème sera résolu; si non, prenons $C\ F' = C\ E$, joignons $C\ E'\ F'$; puis prenons $C\ F'' = C\ E'$, joignons $C\ E''\ F''$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'inégalité de deux lignes telles que $C\ E$, $C\ F$, ou $C\ E'$, $C\ F'$, ou $C\ E''$, $C\ F''$, etc. ne soit plus appréciable : la dernière position de $A\ E\ F$, $A\ E'\ F'$, etc., ainsi obtenue, différera aussi peu qu'on voudra de la position limite $A\ H\ G$ qui donne

angle $$G\ A\ B = \frac{1}{3}\ D\ A\ B.$$

Il est facile de voir sur la figure que les angles $B\ A\ F$, $B\ A\ F'$, etc. approcheront très-rapidement de la valeur $B\ A\ G$. En effet tirons $E\ K$ parallèle à $A\ B$ et coupant $A\ G$ en K, et supposons pour fixer les idées qu'on ait pris

angle $$B\ A\ F > B\ A\ G,$$

on aura $$F'\ G = C\ G - C\ F' = C\ H - C\ E < E\ H < E\ K < F\ G.$$

La nature de ces inégalités fait assez voir que le rapport $F'\ G : F\ G$, et par conséquent aussi le rapport angle $F'\ A\ G : F\ A\ G$,

sera très-petit. De plus, de ce que $F\,G$ et $F'\,G$ ont le même signe, il suit que F' tombe entre F et G. De même F'', F''', etc. tomberont entre F et G. Mais, pour obtenir une idée plus exacte et générale de la rapidité de l'approximation, nous appliquerons le calcul. Soient

angle $$B\,A\,D = \theta$$
$$G\,A\,F = \varphi$$
$$G\,A\,F' = \varphi'.$$

Tirons $A\,C$, coupant $B\,D$ à angles droits en O, et cherchons la relation qui existe entre φ, φ'.

Du triangle $C\,A\,F'$ nous tirons

$$\frac{A\,C}{C\,F'} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{3} + \varphi'\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)};$$

mais $$\frac{A\,C}{C\,F'} = \frac{2\,A\,O}{C\,E} = 2\,\frac{A\,O}{A\,E} = 2\cos\left(\frac{\theta}{6} - \varphi\right);$$

donc $$2\cos\left(\frac{\theta}{6} - \varphi\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{3} + \varphi'\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)} \text{...........}(1)$$

Différentions cette équation par rapport à φ', nous aurons

$$2\sin\left(\frac{\theta}{6} - \varphi\right)\frac{d\varphi}{d\varphi'} =$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\theta}{3} + \varphi'\right)\sin\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3} + \varphi'\right)\cos\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)},$$

ou $$2\sin\left(\frac{\theta}{6} - \varphi\right) = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{d\varphi}{d\varphi'}\,\sin^2\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)}.$$

Formant les quarrés des membres de cette équation et de l'équation (1), et ajoutant les résultats membre à membre, afin d'éliminer φ, nous obtenons :

$$4 = \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{3} + \varphi'\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{d\varphi}{d\varphi'}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)},$$

d'où

$$\left(\frac{d\varphi}{d\varphi'}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right)\left\{4\sin^2\left(\frac{\theta}{6} - \varphi'\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{3} + \varphi'\right)\right\}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Appelons λ la limite de $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ pour $\varphi' = 0$, nous obtiendrons de la dernière équation :

$$\lambda^2 = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{6}\left(4\sin^2\frac{\theta}{6} - \sin^2\frac{\theta}{3}\right)},$$

d'où $$\lambda = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin^3\frac{\theta}{6}},$$

ou $$\lambda = \frac{3}{2\sin^2\frac{\theta}{6}} - 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ou enfin $$\lambda = \frac{1 + 2\cos\frac{\theta}{3}}{1 - \cos\frac{\theta}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dans notre figure *F*, *F'*, *F''*, etc. tombent, ainsi que nous

l'avons vu, entre C et G. Si F tombait sur le prolongement de $C\ G$, on ferait voir tout semblablement que F', F'', etc. tomberaient aussi sur ce prolongement, et entre F et G. Dans le premier cas φ' est positif, dans le second négatif.

Considérons le premier cas, nous avons par la figure

$$\varphi' < G\ A\ O \text{ ou } \frac{\theta}{6};$$

de plus $\quad B\ A\ F' \text{ ou } \frac{\theta}{3} + \varphi' < B\ A\ C \text{ ou } \frac{\theta}{2};$

donc aussi longtemps que θ est un angle géométrique proprement dit, c'est-à-dire plus petit que deux angles droits, $\frac{\theta}{3} + \varphi'$ est aigu. Lorsque θ est tel et que φ' diminue, nous voyons donc que le premier facteur du dénominateur de la formule (2) augmente; et quant au second facteur, qui doit être positif tant que $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ est réel, il augmente aussi, puisque son terme positif augmente, tandis que son terme négatif diminue. Ce dénominateur augmente donc lorsque φ' diminue, d'où il suit que $\left(\frac{d\varphi}{d\varphi'}\right)^2$ diminue avec φ' jusqu'à ce qu'il atteigne sa limite λ^2 lorsque $\varphi' = 0$. On voit du reste facilement, par la figure ou par la formule (1), que lorsque φ diminue il faut nécessairement que φ' diminue aussi; de sorte que les accroissements correspondants de φ, φ' sont constamment de même signe : donc $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ et sa limite λ sont toujours positifs; donc $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ diminue aussi avec φ' jusqu'à ce qu'il atteigne sa limite λ lorsque $\varphi' = 0$.

Tant que φ' n'est pas zéro, on a donc

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} > \lambda$$

ou $$d\varphi > \lambda\, d\varphi'.$$

Il suit évidemment de la figure ou de la formule (1) que φ, φ'

deviennent nuls simultanément, et la dernière inégalité donnera donc par intégration

$$\int_0^{\varphi} d\varphi > \int_0^{\varphi'} \lambda d\varphi'$$

ou

$$\varphi > \lambda \varphi'.$$

Si l'on appelait λ' la valeur de $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ correspondant aux valeurs ψ, ψ' de φ, φ', on prouverait de la même manière que, pour des valeurs de φ, φ' plus grandes que ψ, ψ', on aurait

$$\varphi > \lambda' \varphi';$$

on intègrerait entre les limites ψ, φ et ψ', φ' au lieu de 0, φ et 0, φ'. Il est donc démontré que le rapport $\frac{\varphi}{\varphi'}$ diminue avec φ ou φ' jusqu'à sa limite λ, et par conséquent l'approximation obtenue par notre méthode sera plus rapide que si le rapport $\frac{\varphi}{\varphi'}$ était constamment λ.

Dans le cas où φ' serait négatif, on pourrait prouver tout semblablement au moyen de la formule (2) que le contraire aurait lieu, ou que l'approximation serait moins rapide que si le rapport $\frac{\varphi}{\varphi'}$ était constamment λ. Au reste, en pratique, l'approximation sera si rapide dans les deux cas, qu'il importera peu lequel se présentera.

Pour en revenir au cas de φ' positif, nous avons

$$\frac{\varphi}{\varphi'} > \lambda \qquad \text{ou } \varphi' < \frac{\varphi}{\lambda},$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} > \lambda \qquad \text{ou } \varphi'' < \frac{\varphi'}{\lambda},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\varphi^{(n-1)}}{\varphi^{(n)}} > \lambda \quad \text{ou } \varphi^{(n)} < \frac{\varphi^{(n-1)}}{\lambda};$$

donc multipliant :

$$\frac{\varphi}{\varphi^{(n)}} > \lambda^n \qquad \text{ou } \varphi^{(n)} < \frac{\varphi}{\lambda^n}.$$

De la formule (4) il suit facilement que, tant que $\theta < \frac{3\pi}{2}$, λ augmente lorsque θ diminue.

Considérons quelques cas particuliers. Appliquant la formule (4), ou la formule (3) qui s'adapte au calcul logarithmique, nous aurons :

pour $\theta = \pi,\quad \lambda = 4$

$$\theta = \frac{3\pi}{4},\ \lambda = 4 + 3\sqrt{2} = 8{,}2426\ldots$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3},\ \lambda = 10{,}8229\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \lambda = 10 + 6\sqrt{3} = 20{,}3923\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \lambda = 47{,}7509\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \lambda = 86{,}0432\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \lambda = 195{,}4691\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{8},\ \lambda = 348{,}6664\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{12},\ \lambda = 786{,}3735\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{36},\ \lambda = 7089{,}36\ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{180},\ \lambda = 177270{,}\ldots$$

$$\theta = 0,\quad \lambda = \infty.$$

Quand θ est très-petit, on peut remplacer les sinus de la formule (3) par les arcs correspondants, et cette formule devient

$$\lambda = \frac{54}{\theta^2}.$$

Appliquons notre méthode à un exemple. Prenons 60° pour valeur de l'angle donné, et 1° pour valeur de la première er-

reur φ. Cette erreur n'est pas trop petite pour être dénoncée par la figure; car, puisque l'angle $C\,E\,F = 2\,C\,A\,E$, nous tirons du triangle $C\,F\,E$:

$$\frac{C\,F}{C\,E} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{3} - 2\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{3} + \varphi\right)},$$

et, dans le cas particulier que nous considérons, nous aurons

$$\frac{C\,F}{C\,E} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 21^\circ} = 0{,}8622898\ldots$$

et nous pouvons bien admettre que l'inégalité de deux lignes dont le rapport a cette valeur soit sensible à la vue. Ainsi, dans l'application, la première erreur serait plutôt plus petite que plus grande que 1°.

Ayant admis 1° pour première erreur, nous aurons donc, puisque $\lambda = 47{,}7509$:

la 2me erreur $\varphi' < \frac{1^\circ}{47}$,

la 3me erreur $\varphi'' < \frac{1^\circ}{47^2}$,

. . .
. . .
. . .
. . .

la n^{me} erreur $\varphi^{(n-1)} < \frac{1^\circ}{47^{n-1}}$.

La méthode géométrique d'approximation que nous venons d'exposer sera excellente dans l'application, tant que $A\,C$ sera plus grand que $A\,B$, ou tant que l'angle donné ne dépassera pas 120°. Lorsque cet angle sera très-obtus, $A\,C$, $C\,G$ deviendront très-petits par rapport à $A\,B$; ce qui, dans l'application, nuira nécessairement à l'exactitude des résul-

tats : mais on pourra, dans ce cas, appliquer la méthode au supplément de l'angle donné et retrancher le résultat de 60°. Il est clair qu'il sera avantageux de prendre $A\ B$ aussi grand que possible.

Lorsqu'on aura obtenu une position de AF, AF', etc. suffisamment approchée, on obtiendra facilement l'autre ligne de trisection de l'angle donné en coupant sur le prolongement de $B\ C$ une longueur égale à la dernière valeur obtenue de $C\ F$, $C\ F'$, etc., ce qui fournira un point de la ligne requise.

En vertu du « principe de continuité » de la Géométrie moderne, il est clair que l'application de notre méthode d'approximation pourrait s'étendre à un angle trigonométrique quelconque ; et les recherches analytiques que nous avons faites pourraient être interprétées, dans le cas général, par le principe algébrique de la « permanence des formes équivalentes » (principe qui, jusqu'à un certain point, correspond en Algèbre à celui de continuité en Géométrie) : mais une telle extension de notre méthode a trop peu de valeur pour qu'il vaille la peine de s'y arrêter, puisque un angle trigonométrique quelconque peut toujours être divisé en un multiple de trois angles droits et un angle plus petit que trois angles droits, lequel dernier angle, s'il ne rentre pas dans les cas que nous avons considérés, peut lui-même être divisé en un angle valant deux angles droits et un angle aigu.

La valeur géométrique ou pratique de notre méthode peut être considérablement étendue ; car, de ce que l'on prouve en Algèbre que la résolution d'une équation du troisième degré, dont toutes les racines sont réelles, peut être ramenée à la trisection d'un angle par l'application de la Trigonométrie, il suit que tout problème dont la solution analytique dépendra d'une telle équation, et qui par conséquent ne sera pas du do-

maine de la Géométrie élémentaire, pourra être ramené au problème de la trisection de l'angle et résolu approximativement par notre méthode.

Si l'on avait une méthode d'approximation analogue pour l'extraction géométrique de racines cubiques, on pourrait l'appliquer semblablement aux problèmes dépendant analytiquement du cas des équations du troisième degré où il n'y a qu'une racine réelle.

QUADRATURE DU CERCLE

SOLUTION APPROCHÉE

DE LA

QUADRATURE DU CERCLE

INDÉFINIE *

On a généralement

$$\sin\theta = 2^n \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\ldots\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n},$$

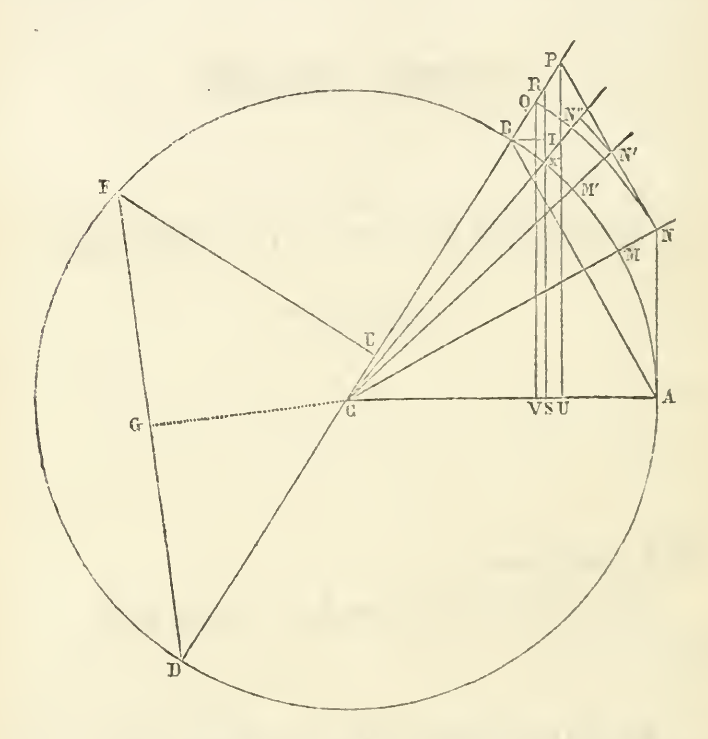
d'où il suit que

$$\theta = \sin\theta \sec\frac{\theta}{2}\sec\frac{\theta}{2^2}\sec\frac{\theta}{2^3}\ldots\ldots\sec\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

Soit $A\ M\ B$ un arc de cercle à rectifier, ayant C pour centre. Tirez le diamètre $B\ C\ D$, puis $C\ M\ N$ parallèle à $D\ A$, coupant le cercle en M; tirez $C\ M'\ N'$ parallèle à $D\ M$, $C\ M''\ N''$ parallèle à $D\ M'$, et ainsi de suite : $C\ M$ partagera

* J'envoyai le contenu de ce travail, au printemps de l'année 1861, aux éditeurs du « Quarterly Journal of pure and applied Mathematics », publié à Londres.

l'angle $A\ C\ B$ en deux parties égales ; de même $C\ M'$ partagera $M\ C\ B$ en deux parties égales, et ainsi de suite. Élevez $A\ N$ perpendiculaire sur $C\ A$, $N\ N'$ perpendiculaire sur $C\ N$,



$N'\ N''$ perpendiculaire sur $C\ N'$, et ainsi de suite. Du centre C décrivez l'arc de cercle $N\ Q$, prolongez $N\ N'$ jusqu'en P, prenez

$$Q\ R = \frac{1}{3}\ Q\ P,$$

et abaissez les perpendiculaires $Q\ V$, $R\ S$, $P\ U$ sur $C\ A$. Supposez que des constructions semblables soient faites en partant des points N', N'', au lieu de N ; la figure fait facilement voir qu'après n constructions semblables (celle par rapport à N

étant la première), on aura, appelant θ l'angle $A\ C\ B$; r le rayon $C\ A$; $Q\ V_n$, $P\ U_n$, $R\ S_n$ les n^{mes} lignes $Q\ V$, $P\ U$, $R\ S$:

$$Q\ V_n = r \sin\theta \sec\frac{\theta}{2} \sec\frac{\theta}{2^2} \ldots \sec\frac{\theta}{2^n}$$

$$= r\,\theta \frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}, \text{ (Voyez ci-dessus)}$$

et développant le sinus en série :

$$Q\ V_n = r\,\theta\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\theta^2}{2^{2n}} + \frac{1}{120}\frac{\theta^4}{2^{4n}} - \frac{1}{5040}\frac{\theta^6}{2^{6n}} + \ldots\ldots\right).$$

De plus

$$P\ U_n = Q\ V_n \sec\frac{\theta}{2^n} = r\,\theta\ \frac{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}$$

$$= r\,\theta\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\theta^2}{2^{2n}} + \frac{2}{15}\frac{\theta^4}{2^{4n}} + \frac{17}{315}\frac{\theta^6}{2^{6n}} + \frac{62}{2835}\frac{\theta^8}{2^{8n}} + \ldots\right),$$

donc

$$R\ S_n = \frac{2}{3} Q\ V_n + \frac{1}{3} P\ U_n$$

$$= r\,\theta\left(1 + \frac{1}{20}\frac{\theta^4}{2^{4n}} + \frac{1}{56}\frac{\theta^6}{2^{6n}} + \frac{7}{960}\frac{\theta^8}{2^{8n}} + \ldots\right).$$

Lorsque θ n'est pas très-grand, par exemple lorsqu'il est moindre que l'unité, ces formules font voir que $Q\ V_n$, $P\ U_n$, et surtout $R\ S_n$ qui ne contient pas de terme en θ^2, ont des valeurs fort rapprochées de $r\,\theta$, ou de l'arc $A\ B$, même lorsque $n = 1$. Lorsque θ est près de la valeur π, les constructions deviennent inexactes et même impraticables; mais on pourra dans ce cas les appliquer à $\frac{\theta}{2}$ au lieu de θ.

La quadrature indéfinie *proprement dite* s'achèvera facilement de la manière suivante :

Sur un diamètre $D\,B$ prenez

$$D\,E = R\,S,$$

élevez l'ordonnée $E\,F$ perpendiculaire sur DE , joignez $D\,F$, prenez G milieu de $D\,F$, ou, ce qui revient au même, abaissez $C\,G$ perpendiculaire sur $D\,F$; $D\,G$ sera le côté d'un quarré, égal au secteur $C\,A\,M\,B$ au même degré d'approximation que celui de l'égalité de $R\,S$ et arc $A\,M\,B$.

En effet $D\,G^2 = \frac{1}{4}\,D\,F^2 = \frac{1}{4}\,D\,B \times D\,E = \frac{1}{2}\,C\,A \times R\,S$;

mais $$C\,A\,M\,B = \frac{1}{2}\,C\,A \times A\,M\,B,$$

ainsi $$D\,G^2 : C\,A\,M\,B = R\,S : A\,M\,B,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si $R\,S$ était plus grand que le diamètre, on pourrait prendre

$$D\,E = \frac{1}{4}\,R\,S,$$

alors il est facile de voir que $D\,F$ lui-même serait le côté du quarré cherché, au même degré d'approximation que précédemment.

QUADRATURE DÉFINIE.

Comme exemple de l'approximation obtenue en prenant $R\,S_a$ pour valeur de l'arc $A\,B$, prenons le cas où $\theta = \frac{\pi}{6}$, nous

aurons $$C\,R = 2\,R\,S = 2\,r\,\frac{\pi}{6} \text{ à peu près},$$

d'où $3\,C\,R = 2\,C\,Q + C\,P = 2\,C\,N + C\,P = \pi\,r$ à peu près.

L'erreur commise en prenant $2\,C\,N + C\,P$ pour valeur de la demi-circonférence sera, négligeant les termes au-delà de celui en θ^8, à peu près

$$\frac{1}{20}\left(\frac{\pi}{12}\right)^4 + \frac{1}{56}\left(\frac{\pi}{12}\right)^6 + \frac{7}{960}\left(\frac{\pi}{12}\right)^8$$

ou $0{,}0002408$ ou $\frac{1}{4153}$ de la demi-circonférence.

Nous avons donc déjà ici une solution fort approchée et d'une construction très-simple, de la rectification d'une demi-circonférence, ou, ce qui revient au même, de la quadrature définie du cercle.

Faisant usage de $R\ S_2$ au lieu de $R\ S$, ou de la valeur correspondante $2\ C\ N' + C\ P'$, que l'on obtient par une nouvelle construction aussi simple que la première, l'erreur commise ne sera à peu près que de

$$\frac{1}{20}\left(\frac{\pi}{24}\right)^4$$

ou $\frac{1}{68100}$ de la demi-circonférence.

Ces erreurs sont toutes en excès, et chacune est à peu près $\frac{1}{16}$ de la précédente.

Pour achever la quadrature du cercle entier, on n'aura qu'à prendre pour valeur de $D\ E$ la moitié de la valeur obtenue pour la demi-circonférence, c'est-à-dire $C\ N + \frac{C\ P}{2}$ ou $C\ N' + \frac{C\ P'}{2}$ etc.; $C\ F$ sera alors le côté d'un quarré qui ne différera de l'aire du cercle que d'environ $\frac{1}{4153}$ ou $\frac{1}{68100}$ de sa valeur, selon qu'on aura pris la première ou la seconde approximation.

Si c'était l'arc $A\ B$ lui-même que l'on avait cherché, le degré de l'approximation aurait été le même.

QUADRATURE D'UN SEGMENT.

Pour trouver l'aire du segment $A\ M\ B\ A$, tirez $B\ T$ parallèle à $C\ A$, coupant $R\ S$ en T, puis dans la construction ci-dessus prenez

$$D\,E = R\,T$$

ou $$D\,E = \frac{1}{4}\,R\,T;$$

$D\,G$ ou $D\,F$ respectivement sera le côté d'un quarré à peu près égal au segment.

En effet,

triangle $$A\,C\,R = \frac{1}{2}\,A\,C \times R\,S,$$

secteur $$C\,A\,M\,B = \frac{1}{2}\,A\,C \times A\,M\,B,$$

donc aire $A\,C\,R = C\,A\,M\,B$ à peu près;

mais, si l'on a pris $D\,E = R\,T$, on a

$$D\,G^2 = \frac{1}{2}\,C\,A.\,R\,T = \frac{1}{2}\,C\,A\,(R\,S - T\,S)$$
$$= \text{aire } A\,C\,R - A\,C\,B$$
$$= A\,C\,M\,B - A\,C\,B \quad \text{à peu près}$$
$$= A\,B\,M\,A \quad \text{à peu près.}$$

Il faut remarquer que l'erreur absolue est la même pour le segment que pour le secteur correspondant; elle sera donc en général une plus grande fraction de l'aire du segment que de l'aire du secteur. Si l'erreur est $\frac{1}{m}$ de l'aire du secteur, elle sera

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{\theta}{\theta - \sin\,\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{6}{m\,(\theta^2 - \ldots.)}$$

de l'aire du segment, puisque

secteur $C\,A\,M\,B$: triangle $A\,C\,B = \theta : \sin\,\theta$.

Lorsque θ sera très-petit, cette méthode sera donc peu satisfaisante; mais on peut se rappeler qu'à mesure que θ diminue, l'aire du segment tend à devenir $\frac{2}{3}$ de celle du triangle formé par la corde et les tangentes à ses extrémités.

QUADRATURE DE FIGURES ELLIPTIQUES.

La quadrature des figures correspondantes pour l'ellipse sera aussi facile et aussi exacte.

En effet si sur l'axe majeur comme diamètre nous décrivons un « cercle auxiliaire », les figures elliptiques peuvent être conçues comme formées des figures *correspondantes* de ce cercle, par la diminution des ordonnées (parallèles à l'axe mineur) de ces dernières dans le rapport de l'axe mineur à l'axe majeur; d'où il suit que le rapport des aires des figures correspondantes est le même que celui des axes. Cette propriété nous conduit à la construction suivante :

Quel que soit le cas de quadrature traité ci-dessus qu'on veuille appliquer à l'ellipse, rectifiez l'arc correspondant du cercle auxiliaire (c'est-à-dire l'arc qui est compris entre les mêmes ordonnées que l'arc elliptique) d'après notre méthode; sur l'axe mineur comme diamètre décrivez un cercle. Soit $D F B$ (voyez la figure) ce cercle; prenez $D E$ égal à l'arc rectifié du cercle auxiliaire (ou à la ligne correspondant à $R T$, si c'est d'un segment qu'il s'agit), et achevez la construction comme précédemment; $D G$ sera le côté du quarré cherché. Car, $D E$ demeurant constant, $D G^2$ varie comme $D B$; et lorsque $D B$ est égal à l'axe majeur, $D G^2$ est l'aire de la figure relative au cercle auxiliaire; donc lorsque $D B$ est égal à l'axe mineur, $D G^2$ est l'aire de la figure elliptique.

De cette manière on obtiendra, soit l'aire d'un secteur, soit celle d'un segment, soit celle de l'ellipse entière, au même degré d'approximation (par rapport à l'aire elliptique) que celui que l'on obtiendrait, pour la figure relative au cercle auxiliaire, avec la même valeur de $D E$; car $D B$ étant une constante, chacune de ces aires est proportionnelle à $D E$.

Lorsque l'arc rectifié sera plus grand que l'axe mineur, on

pourra prendre $D\ E$ égal à $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{9}$ etc. de l'arc rectifié, d'où il suivra que $2\ D\ G$ (ou $D\ F$) ou $3\ D\ G$ etc. sera le côté du quarré cherché. Ou bien, si l'axe mineur est très-petit, on pourra prendre $D\ B$ égal à 4 fois, 9 fois, etc. l'axe mineur; et, si l'on prend $D\ E$ égal à l'arc rectifié (ou à la ligne correspondant au cas d'un segment), $\frac{1}{2}\ D\ G$ ou $\frac{1}{3}\ D\ G$ etc. sera le côté du quarré cherché. Ou bien encore on pourra combiner ces deux modifications. Si par exemple on prend $D\ B$ égal à 4 fois l'axe mineur et $D\ E$ égal à $\frac{1}{4}$ de l'arc rectifié (ou ligne correspondante pour un segment); $D\ G$ sera le côté du quarré cherché.

Il est clair que ces diverses modifications de construction n'affectent pas le degré d'approximation des résultats.

EXTENSION DE LA MÉTHODE.

Prolongeons $N'\ N''$ jusqu'à ce qu'il rencontre $C\ P$ en P'; du centre C décrivons un arc de cercle $N'\ Q'$ coupant $C\ P$ en Q'; abaissons les perpendiculaires $P'\ U'$, $Q'\ V'$ sur $C\ A$; et supposons de telles constructions faites en partant de N'', N''', etc. au lieu de N'.

Désignons

$$\frac{2\ Q\ V_n + P\ U_n}{3} \text{ par } \left(\frac{2\ Q\ V + P\ U}{3}\right)_n$$

et ainsi d'autres expressions analogues, nous avons vu que

$$\left(\frac{2\ Q\ V + P\ U}{3}\right)_n =$$

$$r\,\theta\left(1 + \frac{1}{20}\frac{\theta^4}{2^{4n}} + \frac{1}{56}\frac{\theta^6}{2^{6n}} + \frac{7}{960}\frac{\theta^8}{2^{8n}} + \ldots\ldots\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

On pourra faire voir tout semblablement, par élimination de θ^4,

que $$\left(\frac{4\,P'\,U' - P\,U}{3}\right)_n =$$

$$r\,\theta\left(1 - \frac{1}{30}\frac{\theta^4}{2^{4n}} - \frac{17}{1008}\frac{\theta^6}{2^{6n}} - \frac{31}{4320}\frac{\theta^8}{2^{8n}} - \ldots\ldots\right)\ldots\ldots (2)$$

$$\left(\frac{4\,Q'\,V' - Q\,V}{3}\right)_n =$$

$$r\,\theta\left(1 - \frac{1}{480}\frac{\theta^4}{2^{4n}} + \frac{1}{16128}\frac{\theta^6}{2^{6n}} - \frac{1}{1105920}\frac{\theta^8}{2^{8n}} + \ldots\right)\ldots (3)$$

$$\left(\frac{2\,P'\,U' + Q\,V}{3}\right)_n =$$

$$r\,\theta\left(1 + \frac{1}{120}\frac{\theta^4}{2^{4n}} + \frac{1}{2016}\frac{\theta^6}{2^{6n}} + \frac{1}{17280}\frac{\theta^8}{2^{8n}} + \ldots\right)\ldots\ldots (4)$$

Éliminons θ^5 des formules (1), (2) et (3), (4) ; nous aurons respectivement :

$$\left(\frac{12\,P'\,U' + 4\,Q\,V - P\,U}{15}\right)_n =$$

$$r\,\theta\left(1 - \frac{1}{336}\frac{\theta^6}{2^{6n}} - \frac{1}{720}\frac{\theta^8}{2^{8n}} - \ldots\ldots\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\left(\frac{16\,Q'\,V' + 2\,P'\,U' - 3\,Q\,V}{15}\right)_n =$$

$$r\,\theta\left(1 + \frac{1}{6720}\frac{\theta^6}{2^{6n}} + \frac{1}{92160}\frac{\theta^8}{2^{8n}} + \ldots\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Enfin éliminant θ^7 des deux dernières formules, nous aurons

$$\left(\frac{320\,Q'\,V' + 52\,P'\,U' - 56\,Q\,V - P\,U}{315}\right)_n =$$

$$r\,\theta\left(1 - \frac{1}{17920}\frac{\theta^8}{2^{8n}} - \ldots\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Il n'est pas besoin de dire que j'ai choisi ce système d'éliminations, d'entre ceux qui sont possibles, parce qu'il conduit aux résultats les plus simples.

Si dans les premiers membres des formules ci-dessus on remplace les lignes par leurs valeurs en fonctions de θ, que

l'on dérive facilement de la figure, on obtient l'interprétation goniométrique de ces formules.

Appliquant ce procédé en particulier à la formule (3) (qui, d'entre les quatre premières formules, contient le moindre coefficient de θ^5, et a de plus l'avantage d'avoir des signes alternatifs, ce qui fait qu'en négligeant les termes qui suivent le second, on est sûr d'obtenir pour erreur une valeur trop grande), on obtiendra pour son premier membre, après réductions :

$$r\left(\frac{16 \sin \frac{\theta}{4} - 2 \sin \frac{\theta}{2}}{3}\right).$$

ou

$$\frac{8\, A\, M - A\, B}{3}.\ ^*$$

Comparant les deux valeurs du dit premier membre de la formule (3), on obtient :

$$4\, Q'\, V' - Q\, V = 8\, A\, M - A\, B$$

Ainsi si l'on prend

angle $A\, C\, B = 30°$

et $D\, E = 8$ corde $A\, M$ — corde $A\, B$

$= r$ (8 corde 15° — corde 30°),

il suivra de la théorie des quadratures que nous avons exposée et de la formule (3) que $D\, F^2$ différera en défaut de l'aire totale du cercle d'une fraction de cette aire

$$< \frac{\pi^4}{480 .\ 2^4 .\ 6^4} \text{ ou } < \frac{1}{102180}.$$

Cette manière d'obtenir la quadrature définie est digne

* Une autre manière de trouver l'expansion de cette expression se trouve dans le « Differential and Integral Calculus » de DE MORGAN, p. 249. On l'obtiendrait aussi en éliminant θ^3 des formules exprimant $r \sin \frac{\theta}{2}$ et $r \sin \frac{\theta}{4}$ en puissances de θ.

d'être spécialement remarquée, à cause de la facilité de la construction géométrique et de la très-grande approximation obtenue. On doit noter en même temps que r (8 corde 15° — corde 30°) représente le quart de la circonférence à moins de un 102180me près.

Mais il faut se rappeler que ce procédé n'est qu'un cas particulier de la méthode générale, et qu'il ne donne qu'un résultat unique, tandis que la méthode générale peut à juste titre être appelée « méthode » et « méthode progressive », parce qu'elle peut conduire *progressivement* à des résultats de plus en plus approchés de l'exactitude. *

En dernier lieu l'interprétation géométrique des formules

$$Q\,V_n = 2^n\, r \sin\frac{\theta}{2^n}$$

$$P\,U_n = 2^n\, r \,\mathrm{tang}\frac{\theta}{2^n}$$

$$\frac{Q\,V_n}{P\,U_n} = \cos\frac{\theta}{2^n}$$

$$\mathrm{arc}\ A\,B = \lim\ P\,U_n \text{ pour } n = \infty$$

mérite d'être notée.

Quel que soit l'angle donné, on pourra au besoin, pour plus de commodité, appliquer la construction à la moitié, ou au quart, ou au huitième, etc., de cet angle.

* La méthode d'approximation que nous avons donnée pour la trisection de l'angle peut au même titre être appelée une « méthode progressive ».

On connaît diverses approximations à résultat unique pour la quadrature du cercle. Il n'est pas besoin de signaler l'avantage (principalement théorique) d'une « méthode progressive » sur de telles approximations.

NOTES.

Il est une remarque à faire sur les deux méthodes d'approximation que nous venons d'exposer, qui a une grande importance pratique : c'est que nous n'y procédons qu'avec des lignes finies ou, pour parler plus exactement, avec des lignes qui ne vont pas en diminuant indéfiniment à mesure qu'on pousse plus loin l'approximation. Quant au premier problème, c'est aux lignes $C\ E$, $C\ F'$, $C\ E'$, $C\ F''$, etc. que cette remarque s'applique ; et quant au second, c'est aux lignes $Q\ V$, $P\ U$, $Q'\ V'$, $P'\ U'$, etc., car lorsque $Q\ P$ ou $Q'\ P'$ etc. devient très-petit, on peut éviter de chercher le point R en remplaçant $R\ S$ par sa valeur $\frac{2\ Q\ V + P\ U}{3}$ ou, si l'on préfère $\frac{2}{3}\ Q\ V + \frac{1}{3}\ P\ U$.

Il est clair aussi que dans la première méthode on se contentera de marquer les points E, F, E', F', etc., et qu'ainsi on évitera de tirer les lignes $A\ E\ F$, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à celle de ces lignes qui donnera l'approximation voulue. Dans la seconde méthode il suffira de même de marquer les points M, N, M', N', etc., jusqu'à ce qu'on arrive à celui des points N par rapport auquel on achèvera la construction indiquée plus haut pour le premier de ces points.

L'absence de tâtonnements est, de plus, essentielle à des méthodes d'approximation scientifiques. Si l'on objectait au seul tâtonnement employé dans notre première méthode, lorsqu'on tire *A E F à vue*, on pourrait l'éviter en prenant

$$C\ F = C\ O.$$

FIN.

